**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

**Занятие 5.**

**5.1. Решение линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.**

Рассмотренный ранее метод вариации постоянных является универсальным методом решения линейных неоднородных уравнений. Но если правая часть уравнения имеет специальный вид (при постоянных коэффициентах в левой части уравнения) то удобнее решать уравнение иначе.

Напомним, что общее решение неоднородного уравнения рано сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения.

**Теорема 5.1.** Рассмотрим уравнение вида

, (5.1)

где *p* и *q –* константы,а многочлен степени *n.* Тогда:

1) если не является корнем характеристического уравнения

то частное решение уравнения (5.1) нужно искать в виде , где многочлен степени *n (*коэффициенты которого нужно найти);

2) если является корнем кратности 1 характеристического уравнения

то частное решение уравнения (5.1) нужно искать в виде ;

3) если является корнем кратности 2 характеристического уравнения то частное решение уравнения (5.1) нужно искать в виде .

**Теорема 5.2.** Рассмотрим уравнение вида

, (5.2)

где *p* и *q –* константы,а многочлены степеней *n* и соответственно.Тогда:

1) если не является корнем характеристического уравнения

то частное решение уравнения (5.1) нужно искать в виде , где многочлены степени *l,* а *l*;

2) если является корнем (кратности 1) характеристического уравнения то частное решение уравнения (5.1) нужно искать в виде .

Заметим, что комплексный корень квадратного трёхчлена с вещественными коэффициентами может быть только кратности 1, так как тогда тоже является корнем этого квадратного трёхчлена.

Если является корнем (кратности 1) характеристического уравнения, то говорят, что имеет место *резонанс*, о котором подробнее будет сказано ниже.

Заметим, что самое главное – искать частное решение в правильном виде. Как находить коэффициенты искомых многочленов, покажем на примерах.

**Пример 5.1.** Решить уравнение .

*Решение.* Решим сначала однородное уравнение

Характеристическое уравнение имеет корни .

Общее решение однородного уравнения имеет вид: .

Показатель (см. теорему5.1) не является корнем характеристического уравнения, 3 является многочленом степени .

Согласно пункту 1) теоремы 5.1, частное решение исходного уравнения нужно искать в виде , . Подставив в уравнение, получим равенство , откуда находим : , то есть . Тогда Откуда заключаем, что общим решением неоднородного уравнения является семейство функций

**Пример 5.2. Решить уравнение** .

*Решение.* Решим сначала однородное уравнение

Характеристическое уравнение имеет корни .

Общее решение однородного уравнения имеет вид: .

Показатель (см. теорему5.1) является корнем кратности 1 характеристического уравнения, 3 является многочленом степени .

Согласно пункту 2) теоремы 5.1, частное решение исходного уравнения нужно искать в виде ,

. Подставив в уравнение, получим: . Откуда находим: Тогда , а общее решение

**Пример 5.3.** Решить уравнение .

*Решение.* Правую часть уравнения нужно представить в виде

Решим сначала однородное уравнение

Характеристическое уравнение имеет корни .

Общее решение однородного уравнения имеет вид: .

Показатель (см. теорему5.1) является корнем кратности 1 характеристического уравнения, является многочленом степени .

Согласно пункту 2) теоремы 5.1, частное решение исходного уравнения нужно искать в виде

Тогда ,

Подставив в уравнение, получим:

откуда

Для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при соответствующих степенях были равны. Тогда получим систему уравнений:

Откуда Тогда Общее решение

**Пример 5.4.** Решить уравнение .

*Решение.* Решим сначала однородное уравнение

Характеристическое уравнение имеет один корень . Общее решение однородного уравнения имеет вид:

Показатель является корнем кратности 2 характеристического уравнения. многочлен степени Следовательно, частное решение неоднородного уравнения нужно искать в виде (см. пункт 3) теоремы 5.1.) . Тогда

,

Подставив в уравнение, получим:

откуда . Тогда , и общее решение исходного уравнения имеет вид:

**Пример 5.5.** Решить уравнение .

*Решение.* Решим сначала однородное уравнение

Характеристическое уравнение имеет корни .

Общее решение однородного уравнения имеет вид: .

не является корнем характеристического уравнения.

6 – многочлен степени Согласно пункту 1 теоремы 5.2, частное решение неоднородного уравнения нужно искать в виде

*.* Тогда

)+

=

Подставим в уравнение и сократим на :

Перегруппировав слагаемые , получим:

*.*

Приравняв соответственно коэффициенты при и в левой и правой частях уравнения, получим:

откуда находим: Тогда , и общее решение неоднородного уравнения

**5.2. Явление резонанса.**

Уравнение

описывает *свободные колебания*. Положительное число называется *собственной частотой системы*.

Уравнение

описывает *вынужденные колебания* под действием *вынуждающей силы* Если вынуждающая сила является периодической, и её частота совпадает с собственной частотой системы, то происходит так называемый *резонанс*, заключающийся в том, что амплитуда колебаний неограниченно возрастает со временем.

**Пример 5.6.** Решить уравнение .

*Решение.* Правую часть уравнения нужно представить в виде .

Решим сначала однородное уравнение

Характеристическое уравнение имеет корни .

Собственная частота системы

Общее решение однородного уравнения имеет вид:

.

не является корнем характеристического уравнения . Нет резонанса. Частота вынуждающей силы равна 1.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

Тогда ,

*.* Подставив в исходное уравнение, получим:

. Откуда

, следовательно, . Тогда

И общее решение

**Пример 5.7.** Решить уравнение .

*Решение.* Правую часть уравнения нужно представить в виде .

Решим сначала однородное уравнение

Характеристическое уравнение имеет корни .

Собственная частота системы

Общее решение однородного уравнения имеет вид:

.

является корнем характеристического уравнения .

Имеет место резонанс. Частота вынуждающей силы равна 1.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

Тогда

,

.

Подставив в исходное уравнение, получим:

,

Откуда Тогда , и общее решение

Наличие множителя *x* при косинусе и означает, что имеет место резонанс, то есть неограниченное возрастание амплитуды колебания под действием вынуждающей силы.

Продемонстрируем, как применяется принцип суперпозиции (теорема 4.5).

**Пример 5.7.** Решить уравнение

+ (5.3)

*Решение.* 1) Общим решением однородного уравнения является функция (см. пример 5.1.)

2) частным решением уравнения является функция (см. пример 5.1)

2) частным решением уравнения является функция (см. пример 5.2)

3) частным решением уравнения является функция (см. пример 5.3)

4) частным решением уравнения является функция (см. пример 5.5)

Тогда, по принципу суперпозиции, функция будет частным решением уравнения (5.3). Следовательно общим решением уравнения (5.3) будет функция

**Пример 5.8.** Указать вид частн0го решения уравнения

если: а) б)

в) .

*Решение.* Характеристическое уравнение имеет корни

а) Запишем правую часть в виде . не является корнем характеристического уравнения, следовательно, частное решение уравнения нужно искать в виде

б) . является корнем кратности 1 характеристического уравнения, следовательно, частное решение уравнения нужно искать в виде .

в) не является корнем характеристического уравнения, - многочлен степени 1, а коэффициент при равен единице и является многочленом степени , поэтому частное решение уравнения нужно искать в виде при синусе и косинусе должны быть многочлены старшей из степеней (см. теорему 5.2.).

**Задачи для самостоятельного решения.**

Решить уравнения:

,2),

4)

8)

,

*, ,*

*,*

Указать вид частного решения:

*, ,*

*,*

*,*